

BILINEAR AND HAMILTONIAN SYSTEMS, MACRODYNAMICS

A.M. Molchanov 1)

Multiparticle systems,

$$\frac{dx_i}{dt} = a(x_i) + \sum_{k=1}^{k=N} b(x_i, x_k), \quad (1)$$

with number N ,

$$N \gg 1 \quad (2)$$

of components x_i and not small interactions $b(x,y)$ is very important in physics and biology. Its study is a very difficult one, because computer is useless (if $N \sim 10^6$ for example) and the common perturbation theory is not valid, because interaction term $b(x,y)$ is not small.

Luckily, there is an important class of systems, which admits detailed investigation. These are the systems with linear $a(x)$ and bilinear $b(x,y)$.

Introducing a new variable z ,

$$z = x_1 + \dots + x_N \quad (3)$$

we obtain a much more simple system

$$\frac{dx_i}{dt} = a(x_i) + b(x_i, z) \quad (4)$$

The sum of all equations gives an equations for z ,

$$\frac{dz}{dt} = a(z) + b(z, z) \quad (5)$$

The difference between the equations for x_i reduces to different initial conditions.

Therefore we obtain the Macrodynamical System

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= a(z) + b(z, z) \\ \frac{dx}{dt} &= a(x) + b(x, z) \end{aligned} \quad (6)$$

¹⁾ Research Computer Centre USSR Academy of Sciences
Pushchino Moscow Region

The particular case of the stationary point,

$$\frac{dz}{dt} = 0, \quad z = z_0$$

gives the very important notion of the Thermodynamical limit.

We can now interprete the phase portrait of the equations for x . It is the macrodynamical limit of the original system, because every trajectory of this system generates many ($N \gg 1$) different trajectories of the second equation of the Macrodynamic System.

Generalisation

The notion of the summatory function

$$F(x) = f(x_1) + \dots + f(x_N) \quad (7)$$

permits an important generalisation of the macrodynamical approach.

Let us introduce a few functions of x :

$$f_1(x), \dots, f_k(x) \quad (8)$$

and suppose that they satisfy the structural relations,

$$\frac{df_\alpha}{dx} I \left(\frac{df_\beta}{dx} \right)^* = R_{\alpha\beta} f_\gamma(x) \quad (9)$$

where I obeys

$$I^2 = -E \quad (10)$$

Let H ,

$$H = H(F_1, \dots, F_k), \quad (11)$$

be an arbitrary function of its arguments.

Construct the Hamiltonian system with Hamiltonian

$$\mathcal{H}(x_1, \dots, x_N) = H(F_1, \dots, F_k) \quad (12)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = I \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right)^* \quad (13)$$

From (13) follow equations for F_α ,

$$\frac{dF_\alpha}{dt} = \sum \frac{df_\alpha}{dt} \frac{dx_i}{dt} = \sum \frac{df_\alpha}{dx} I \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right)^* = \left\{ \sum \frac{df_\alpha}{dx_i} I \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right)^* \right\} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial F_\alpha} \right)^*$$

Structural relations permit to express the right parts in terms of $\{T_\alpha\}$ only:

$$\frac{dT_\alpha}{dt} = R_{\alpha\beta} T_\beta \left(\frac{\partial H}{\partial T_\beta} \right)^*$$
 (14)

It is a principal distinction between (13) and (14). Last one don't depend on N and is the Macrodynamic equation for the multiparticle system (13).

Macrodynamic approach permits to formulate the important hypotheses:

Bifurcation processes in the macrodynamic equation correspond to the general phase transitions in the multiparticle system.

In supplement is demonstrated how to enclose an arbitrary system (with polynomial right parts) into a system with square right parts.

Conclusion

Systems with square right parts and especially Lotka-Volterra systems can be regarded as macrodynamical equations for multiparticle systems.

А.М.Молчанов

Предложены системы, допускающие точный предельный подход / $N \rightarrow \infty$ / при увеличении числа частиц без предположения о малости взаимодействия.

п^o1. Парное взаимодействие

Динамика системы одинаковых компонент описывается системой дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = a(x_i) + \sum_{k=1}^N b(x_i, x_k) \quad /1/$$

Вектор-функция $a(x)$ задает "внешнее поле", а вектор-функция $b(x, y)$ "воздействие" компоненты на компоненту /"частицу"/ x .

Для задач естествознания характерны большие значения N ,

$$N \gg 1 \quad /2/$$

и существенная роль взаимодействия $b(x, y)$.

Первое обстоятельство делает неперспективным чисто вычислительный /"компьютерный"/ подход, а второе приводит к неприменимости обычных методов теории возмущений /типа "разложения по параметру связи"/.

п^o2. Билинейные системы

Существует, к счастью, важный класс систем - билинейные системы - когда изучение может быть проведено весьма полным образом.

Это случай, когда функции $a(x)$ и $b(x, y)$ линейны по своим аргументам:

$$a(\lambda x + \lambda' x') = \lambda a(x) + \lambda' a(x') \quad /3/$$

$$b(\lambda x + \lambda' x', y) = \lambda b(x, y) + \lambda' b(x', y) \quad \}$$

$$b(x, \mu y + \mu' y') = \mu b(x, y) + \mu' b(x, y') \quad \}$$

/4/

В этом случае система /1/ резко упрощается.

Вводя новое переменное z ,

$$z = x_1 + \dots + x_N \quad /5/$$

получаем, используя линейность b по второму аргументу

$$\frac{dx_l}{dt} = a(x_l) + b(x_l, z)$$

/6/

Складывая теперь все полученные уравнения и используя линейность и линейность b по первому аргументу, получаем уравнение для :

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = a(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z}, \mathbf{z})$$

/7/

Систему /6/ и /7/ удобно записать вместе:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = a(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z}, \mathbf{z})$$

/8/

$$\frac{dx}{dt} = a(x) + b(x, z)$$

/9/

Таким образом вместо N уравнений с N^2 членами мы получили всего два уравнения, причем уравнение для \mathbf{z} интегрируется независимо от \mathbf{x} , а уравнения для x_l одинаковы и отличаются друг от друга лишь начальными данными.

п^o3. Макродинамический предел

Сравнение /6/, /7/ с системой /8/, /9/ позволяет понять, что происходит в предельном случае $N \rightarrow \infty$. Увеличение числа компонент x_1, \dots, x_n приводит к тому, что одна единственная траектория системы /6/ проектируется на N различных /вообще говоря/ траекторий уравнения /9/. Предельный переход $N \rightarrow \infty$ порождает фазовый портрет уравнения /9/. Уравнение /8/ сохраняет одну траекторию.

Важный частный случай, когда эта траектория является стационарной точкой уравнения /8/, соответствует термодинамическому пределу

$$\frac{dz}{dt} = 0, \quad z = z_0$$

/10/

Возникающие в уравнении макродинамики нетривиальные стационарные режимы – предельные циклы или еще более сложные стационарные режимы с перемешиванием – соответствуют нетривиальным обобщениям понятия термодинамического равновесия.

п^o4. Гамильтоновы системы

Принадлежащее А.Я.Хинчину понятие сумматорной функции,

$$F(x) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$$

/11/

позволяет существенно обобщить идею билинейных систем на гамильтоновы системы.

Рассмотрим некоторый /пока произвольный/ набор функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$$

/12/

и построим соответствующий набор сумматорных функций

$$F_\alpha(x) = f_\alpha(x_1) + \dots + f_\alpha(x_n)$$

/13/

$$\alpha = 1, 2, \dots, k$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию ,

$$\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n) = H(F_1, \dots, F_k)$$

/14/

и примем ее за гамильтониан системы:

$$\frac{dx_i}{dt} = I \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right)^*$$

/15/

Учитывая формулу /14/, получаем:

$$\frac{dx_i}{dt} = I \left(\frac{\partial H}{\partial F_\beta} \frac{df_\beta}{dx_i} \right)^* = I \left(\frac{df_\beta}{dx_i} \right)^* \left(\frac{\partial H}{\partial F_\beta} \right)^*$$

/16/

Найдем уравнения для F_α , вытекающее из /16/

$$\frac{dF_\alpha}{dt} - \sum_i \frac{df_\alpha}{dx_i} \frac{dx_i}{dt} = \left\{ \sum_i \frac{df_\alpha}{dx_i} I \left(\frac{df_\beta}{dx_i} \right)^* \right\} \left(\frac{\partial H}{\partial F_\beta} \right)^*$$

/17/

Начиная с этого места, существенно ограничим возможные наборы , вводя структурные соотношения

$$\frac{df_\alpha}{dx} I \left(\frac{df_\beta}{dx} \right)^* = R_{\alpha\beta}^r f_r(x)$$

/18/

Здесь $R_{\alpha\beta}^r$ структурные коэффициенты.

Условия /18/ выполнены для наборов функций $f_\alpha(x)$, квадратичных по аргументу x .

Однако множество таких наборов значительно богаче и поэтому системы вида /16/ являются существенным обобщением класса билинейных систем.

Используя структурные соотношения, получаем уравнения макродинамики для гамильтоновых систем:

$$\frac{dF_\alpha}{dt} = R_{\alpha\beta}^* F_\beta \left(\frac{\partial H}{\partial F_\beta} \right)^*$$

/19/

Уравнения для F_α снова не содержат x_i , которые могут быть затем найдены из системы /16/

$$\frac{dx}{dt} = I \left(\frac{df_\alpha}{dx} \right)^* \left(\frac{\partial H}{\partial F_\alpha} \right)^*$$

/20/

И снова предельный переход $H \rightarrow \infty$ приводит к построению фазового портрета векторного уравнения /20/.

Термодинамический предел соответствует частному случаю макродинамического предела /19/, когда эта система имеет стационарную точку:

$$\frac{dF_\alpha}{dt} = 0, \quad F_\alpha = F_{\alpha 0}$$

/21/

Система /16/ является обобщением билинейных систем /6/ еще и в том смысле, что вывод систем уравнений макродинамики /19/ не использует предположением о парности взаимодействия.

Гамильтоновы системы с парным взаимодействием возникают в предположении квадратичности функции H :

$$H = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} H^{\alpha\beta} F_\alpha F_\beta$$

/22/

п^o5. Фазовый переход

Развиваемый макродинамический подход позволяет сопоставить идею фазового перехода с понятием бифуркации в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если уравнения макродинамики /19/ содержат параметры, то понятно, что их изменение может привести к потере устойчивости стационарного режима.

Возникающий при этом переходный процесс естественно сопоставить с фазовым переходом. Однако более подробное обсуждение этого важного вопроса выходит за рамки обсуждаемой темы.

Дополнение. Полиномиальные системы.

Пусть дана система с полиномиальными правыми частями степени $\ell+1$,

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{\beta} A_{i\beta} x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$$

/Д.1/

Здесь $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ неотрицательные целые числа, причем

$$\beta_1 + \dots + \beta_n \leq l+1$$

/Д.2/

Покажем, что увеличением числа переменных любую такую систему можно точно включить в квадратичную.

На первом шаге сделаем систему однородной степени $l+1$, введя всего одно дополнительное переменное y_0 ,

$$\frac{dy_0}{dt} = 0, \quad y_0 = 1,$$

/Д.3/

Новую систему запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= 0 \\ \frac{dy_i}{dt} &= \sum_{\beta} A_{i,\beta} y_0^{\beta_0} y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n} \end{aligned} \right\}$$

/Д.4/

определив неотрицательную степень β_0 из условия однородности

$$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n = l+1$$

/Д.5/

На следующем шаге введем большое количество новых переменных u_α ;

$$u_\alpha = y_0^{\alpha_0} y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}$$

/Д.6/

где α всевозможные наборы неотрицательных целых чисел, но в сумме на единицу меньше, чем β :

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = l$$

/Д.7/

Введение u_α позволяет систему /Д.4/ в квадратичной форме:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k,r} B_{ikr} y^k u_r$$

/Д.8/

Однако нам цель еще не достигнута, ибо система /Д.8/ незамкнута – она содержит "лишние" переменные u_α .

Увеличим размерность нашей системы, написав уравнения для всех u_α :

$$\frac{du_\alpha}{dt} = \sum_i y_0^{\alpha_0} \dots y_i^{\alpha_{i-1}} y_n^{\alpha_n} \frac{dy_i}{dt}$$

Подставляя вместо $\frac{dy_L}{dt}$ его выражение /Д.8/ получаем:

$$\frac{du_\alpha}{dt} = \sum_{i,s,r} B_{i s r} u_i (y_0^{a_0} \dots y_{i-1}^{a_{i-1}} y_i^{a_i+1} \dots y_n^{a_n}) \quad /Д.9/$$

Заметим, что член, заключенный в скобки имеет степень ровно ℓ , ибо единица, на которую уменьшилась степень y_L компенсируется единицей, на которую увеличилась степень y_k . В результате имеем:

$$\frac{du_\alpha}{dt} = \sum_s B_{s s} u_s u_s \quad /Д.10/$$

Система /Д.8/, /Д.10/ уже замкнута, квадратична и даже однородна.

Она имеет большую серию первых интегралов

$$u_\alpha - y_0^{a_0} y_1^{a_1} \dots y_n^{a_n} = C_\alpha \quad /Д.11/$$

а все решения исходной системы /Д.1/ лежат в пространстве (y_L, u_α) на пересечении поверхностей

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ C_\alpha = 0 \end{array} \right\} \quad /Д.12/$$

Теорема о включении доказана.